ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Тест повышенной сложности к общему зачёту

Демо-версия

1. Найдите размерность и постройте несколько различных базисов линейной оболочки матриц

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Найдите **общее** решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 6x_1+3x_2+14x_3-2x_4+x_5=2,\\ 20x_1+5x_2+10x_3+4x_4+11x_5=20,\\ 13x_1+4x_2+12x_3+x_4+6x_5=11,\\ 4x_1+7x_2+46x_3-12x_4-7x_5=-12,\\ x_1-2x_2-16x_3+5x_4+4x_5=7.\end{cases}$$

(В качестве **базисных** переменных следует взять переменные с **наименьшими** возможными номерами.)

3. В декартовой системе координат $Oxyz$ в пространстве задано уравнение плоскости P: $x+y+z=0$. Линейный оператор $\hat{A}$ действует в трёхмерном линейном пространстве геометрических векторов с общим началом в точке O по следующему правилу: $\hat{A}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{b}$ — вектор, симметричный вектору $\boldsymbol{a}$ относительно плоскости P. Найдите матрицу оператора $\hat{A}$ в ортонормированном декартовом базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

4. В ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, e_4 евклидова пространства даны столбцы координат элементов x_1, x_2, x, соответственно:

$$X_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Найдите проекцию элемента x на линейную оболочку элементов x_1, x_2 и перпендикуляр элемента x к линейной оболочке элементов x_1, x_2.

5. В ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 евклидова пространства даны столбцы координат элементов x_1, x_2, соответственно:

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу линейного оператора ортогонального проектирования на линейную оболочку элементов x_1, x_2 в базисе e_1, e_2, e_3.

6. Дана матрица линейного оператора в некотором базисе e_1, e_2, e_3 вещественного линейного пространства:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдите **все** собственные значения и **все** собственные векторы линейного оператора. В ответе укажите координаты собственных векторов в базисе e_1, e_2, e_3.

7. В некотором базисе e_1, e_2, e_3 вещественного линейного пространства задано выражение для квадратичной формы: $Q(x) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$. Приведите квадратичную форму к каноническому виду линейным невырожденным преобразованием координат.

8. В некотором базисе e_1, e_2 вещественного линейного пространства заданы выражения для двух квадратичных форм: $Q_1(x) = (x_1)^2 + 56(x_2)^2 + 16x_1x_2$, $Q_2(x) = (x_1)^2 + 26(x_2)^2 + 10x_1x_2$. Приведите данные квадратичные формы к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием координат так, чтобы все канонические коэффициенты одной из квадратичной форм были равны 1.