Демонстрационный вариант теста №1
по математическому анализу (2 курс, 3 семестр)

(Темы: нормаль к поверхности, касательная плоскость, поверхностные интегралы, интегральные теоремы, дифференциальные операции в скалярных и векторных полях.)

1. Записать уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2 + y^2 = 1 + 2x$ в точке $M(2;\, 1;\, -2)$.

2. Найти вектор нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1;\, 0;\, 1)$.

3. Найти массу полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad z \ge 0$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рекомендуем вычислять интеграл <u>в сферической системе</u> координат).

4. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Phi} (x + y + z)\, dS$, где поверхность $\Phi : xy = 1 - z, \quad x^2 + y^2 \le 3$ (часть поверхности гиперболического параболоида, заключенная внутри цилиндра).

5. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Phi} y^2\, dydz$, где Φ - нижняя сторона поверхности части конуса $x^2 + y^2 = z^2, \quad x \ge 0, \quad 1 \le z \le 2$ (нормаль к выбранной стороне поверхности образует <u>тупой</u> угол с осью OZ).

6. Использую формулу Остроградского, найти поток векторного поля $\vec{A} = \{x^2 + z^2,\ x^2 + z^2,\ z^2 + y^2\}$ через <u>полную</u> поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 4, \quad 0 \le z \le 3$ в направлении <u>внешней нормали</u> к ней.

7. Применяя формулу Стокса, вычислите циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = (y - z)\,\mathbf{i} + (z - x)\,\mathbf{j} + (x - y)\,\mathbf{k}$ вдоль эллипса, получающегося при пересечении цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскости $x + z = 3$. Контур пробегается против часовой стрелки, если смотреть из начала координат.

8. Вычислить $\operatorname{rot}\vec{A}$ векторного поля $\vec{A} = y\vec{\mathbf{i}} + (x - z)\,\vec{\mathbf{j}} + (y - z)\vec{\mathbf{k}}$ в декартовой прямоугольной системе координат.

9. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{A} = (-x + z)\vec{\mathbf{i}} + (y - z)\vec{\mathbf{j}} + (x - y)\vec{\mathbf{k}}$ потенциальным или/и соленоидальным.

10. Если $\vec{r} = \{x, y, z\}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а $\vec{H}$ – постоянный вектор, то $\operatorname{rot}\left(r^2 \cdot [\vec{H}, \vec{r}]\right) = ?$

11. Если $\vec{r} = \{x, y, z\}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а $\vec{H}$ – постоянный вектор, то $\Delta\left(r^5 \cdot (\vec{H}, \vec{r})\right) \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}\left(r^5 \cdot (\vec{H}, \vec{r})\right) = ?$