Демонстрационный вариант теста к общему зачёту по математическому анализу

1 курс (2013 г.)

1. Найдите:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-2x^2+4}\right);\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^4-2x+7)}{\ln(x^{10}+7x^5+2)};$$

$$\lim_{x\to\pi}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x};\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+7}{3x-1}\right)^{2x}.$$

2. Пользуясь свойствами символа «*o* малое», приведите $\frac{1}{\sqrt{x}}o\left(x^2+o\left(x^3\sqrt{x}+x^2\right)\right)$ к виду $o(x^a)$ при $x\to 0$, где *a* – наибольшее подходящее неотрицательное число.

3. Исследуйте сходимость, ограниченность и монотонность последовательности $\left\{\frac{\cos\left(n^n\right)}{n}\right\}$.

4. Найдите производную функции $\left(\sin x+x^2\right)^{\operatorname{arctg} x}$.

5. Исследуйте $f(x)=\begin{cases}x^a\sin\frac{1}{x}, x\neq 0;\\ 0, x=0\end{cases}$ в точке $x = 0$ на непрерывность и дифференцируемость.

6. Подберите коэффициенты *a* и *b* так, чтобы функция $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & x\le 5\\ ax+b, & x>5\end{cases}$ была непрерывной и дифференцируемой функцией.

7. Разложите по формуле Тейлора функцию $f(x)=\sin x\cdot\sqrt{3-x^2}$, в точке $x_0=1$ до членов второго порядка.

8. Найдите $f^{(2013)}(x)$, если $f(x)=(3x^2-x-7)\sin\left(5x-2\right)$.

9. Найдите:

$$\int_2^{e^2}\frac{dx}{x\ln x\ln\left(\ln x\right)};\ \int_0^{\pi}e^{-2013x}\sin\left(2014\cdot x\right)dx;\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(x^2+16x+17\right)\left(x-4\right)^2};\ \int_0^{\pi/4}\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+\operatorname{tg} t-2}}.$$

10. Найдите $\frac{d}{dx}\int\limits_{\cos^2 x}^{\pi x}\operatorname{arctg}\left(t^2\right)dt$.