

Пробный вариант теста по ММФ

1. Укажите уравнение, которому удовлетворяет функция $u(x, t)$, описывающая профиль тонкой упругой однородной струны при малых поперечных колебаниях, если внешние силы на нее не действуют.

2. Область D с замкнутой поверхностью S заполнена однородным веществом. Плотность источников и стоков тепла в D от времени не зависит, а на границе S температура поддерживается равной нулю. Укажите краевую задачу, решением которой является функция $u(M)$, $M(x, y, z) \in \bar{D}$, описывающая стационарное распределение температуры в области $\bar{D} = D \cup S$.

3. К какому типу принадлежит уравнение $3u_{xx} - 5u_{yy} + 12u_x + 9u_y + 34u + 15 = x$, где $u = u(x, y)$?

4. Канонической формой для уравнения какого типа является уравнение $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2u_x + 7u_y + 10u_z + \sin x = 0$, где $u = u(x, y, z)$?

5. Сколько решений имеет начально-краевая задача

$$u_t = u_{xx}, \quad -1 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u|_{t=0} = \sin \pi x, \quad u|_{x=1} = 0?$$

6. Пусть G – квадрат размера $\pi \times \pi$. При какой частоте ω решение начально-краевой задачи

$$u_{tt} = \Delta u + \sin \omega t \sin x \sin y, \quad M \in G, \quad t > 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{\partial G} = 0$$

неограниченно возрастает с ростом t ?

7. Методом разделения переменных с использованием цилиндрической системы координат решается задача на собственные значения в цилиндре. С помощью каких функций выражается зависимость от радиуса собственных функций?

8. Какой вид имеет фундаментальная система решений уравнения для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента порядка ν , где ν не является целым числом?

9. К какому предельному значению стремится решение начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in R, t > 0, \\ u|_{t=0} = h(x), \end{cases}$$

при $x \rightarrow +\infty$ и $t=1$, если h – функция Хевисайда (равна 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$)?

10. Сколько строго положительных решений имеет начально-краевая задача

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin^2 \pi x, & u_t|_{t=0} = 0? \end{cases}$$

11. Чему равен наименьший положительный корень уравнения $J_{1/2}(x) = 0$?

12. Укажите формулу Родрига для полиномов Лежандра.

13. Чему равен предел производной присоединенной функции Лежандра $P_{10}^{(4)}(x)$ при $x \rightarrow 1$?

14. Сколько линейно независимых собственных функций вида $Y_3^{(m)}(\theta, \varphi)$ имеет задача Штурма-Лиувилля на единичной сфере?

15. Сколько решений имеет краевая задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{при } r > 1, \\ u|_{r=1} = 1 + \sin \varphi, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} u = 0, \end{cases}$$

где переменные r, φ означают радиус и угол в полярной системе координат?

16. Пусть u – функция, гармоническая и непрерывная в круге $r \leq 1$, принимающая на его границе значения $u|_{r=1} = 5 \sin^5 \varphi$. Переменные r и φ означают радиус и угол в полярной системе координат. Чему равно максимальное значение u ?

17. Укажите условия применимости первой формулы Грина

$$\int_D U \Delta V dv = \int_S U \frac{\partial V}{\partial n} ds - \int_D \text{grad} U \text{grad} V dv,$$

где S – граница области D .