Пробный вариант теста по ММФ

1.Укажите уравнение, которому удовлетворяет функция $u(x,t)$, описывающая профиль тонкой упругой однородной струны при малых поперечных колебаниях, если внешние силы на нее не действуют.

2. Область D с замкнутой поверхностью S заполнена однородным веществом. Плотность источников и стоков тепла в D от времени не зависит, а на границе S температура поддерживается равной нулю. Укажите краевую задачу, решением которой является функция $u(M)$, $M(x,y,z)\in\bar{D}$, описывающая стационарное распределение температуры в области $\bar{D}=D\bigcup S$.

3.К какому типу принадлежит уравнение $3u_{xx}-5u_{yy}+12u_x+9u_y+34u+15=x$, где $u=u(x,y)$?

4. Канонической формой для уравнения какого типа является уравнение $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+2u_x+7u_y+10u_z+\sin x=0$, где $u=u(x,y,z)$?

5.Сколько решений имеет начально-краевая задача

$$u_t=u_{xx},\quad -1<x<1,\ t>0,$$
$$u\big|_{t=0}=\sin\pi x,\ u\big|_{x=1}=0?$$

6. Пусть G – квадрат размера $\pi\times\pi$. При какой частоте ω решение начально-краевой задачи

$$u_{tt}=\Delta u+\sin\omega t\sin x\sin y,\ \ M\in G,\ t>0,$$
$$u\big|_{t=0}=0,\ u_t\big|_{t=0}=0,\ u\big|_{\partial G}=0$$

неограниченно возрастает с ростом t?

7. Методом разделения переменных с использованием цилиндрической системы координат решается задача на собственные значения в цилиндре. С помощью каких функций выражается зависимость от радиуса собственных функций?

8. Какой вид имеет фундаментальная система решений уравнения для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента порядка ν, где ν не является целым числом?

9. К какому предельному значению стремится решение начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ x \in R, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = h(x), \end{cases}$$

при $x \to +\infty$ и $t = 1$, если h – функция Хевисайда (равна 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$)?

10. Сколько строго положительных решений имеет начально-краевая задача

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ x \in R, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \sin^2 \pi x, \ u_t\big|_{t=0} = 0? \end{cases}$$

11. Чему равен наименьший положительный корень уравнения $J_{1/2}(x) = 0$?

12. Укажите формулу Родрига для полиномов Лежандра.

13. Чему равен предел производной присоединенной функции Лежандра $P_{10}^{(4)}(x)$ при $x \to 1$?

14. Сколько линейно независимых собственных функций вида $Y_3^{(m)}(\theta, \varphi)$ имеет задача Штурма-Лиувилля на единичной сфере?

15. Сколько решений имеет краевая задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ при } \ r > 1, \\ u\big|_{r=1} = 1 + \sin \varphi, \\ \lim\limits_{r \to +\infty} u = 0, \end{cases}$$

где переменные r, φ означают радиус и угол в полярной системе координат?

16. Пусть u – функция, гармоническая и непрерывная в круге $r \le 1$, принимающая на его границе значения $u\big|_{r=1} = 5\sin^5\varphi$. Переменные r и φ означают радиус и угол в полярной системе координат. Чему равно максимальное значение u?

17. Укажите условия применимости первой формулы Грина

$$\int_D U\Delta V dv = \int_S U\frac{\partial V}{\partial n}ds - \int_D \operatorname{grad}U \operatorname{grad}V dv,$$

где S – граница области D.

18. Укажите функцию, удовлетворяющую уравнению $\Delta u - 36u = 0$ в полярных координатах.

19. Укажите ограниченное решение задачи для уравнения Гельмгольца в круге радиуса $r = 7$:

$$\begin{cases} \Delta u + 144u = 0, \quad 0 < r < 7, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ \left|u(r,\varphi)\right|\Big|_{r=0} < \infty, \\ u\left(7,\varphi\right) = 2\cos 3\varphi,\ 0 \le \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

20. Укажите решение задачи для уравнения Гельмгольца вне круга радиуса $r = 7$, удовлетворяющее условиям излучения Зоммерфельда:

$$\begin{cases} \Delta u + 16u = 0, \quad r > 7, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u\left(7,\varphi\right) = 3,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ \lim\limits_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - 4iu\right) = 0. \end{cases}$$